

Неавтономные симметрии КдФ и решения типа ступеньки

В.Э. Адлер

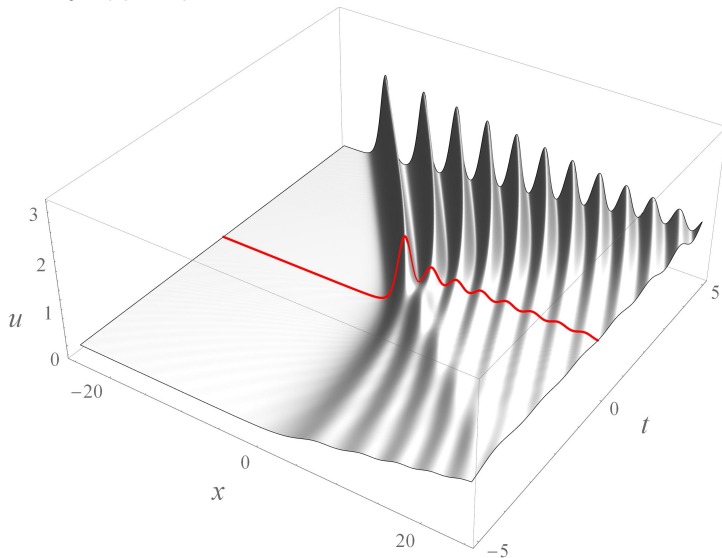
Изучаются решения уравнения КдФ, определяемые стационарным уравнением для симметрий из некоммутативной подалгебры, а именно, для линейной комбинации мастер-симметрии и симметрии растяжения. Рассматриваемая связь эквивалентна ОДУ порядка 6, обладающему двумя первыми интегралами. Решения общего положения имеют особенность на прямой $t = 0$. Требование регулярности выделяет 3-параметрическое семейство решений, осциллирующих около 1 и удовлетворяющих, при $t = 0$, уравнению, эквивалентному вырожденному уравнению P_5 . Численные эксперименты показывают, что в этом семействе можно выделить 2-параметрическое подсемейство сепаратрисных решений типа ступеньки, выходящих на разные константы при $x \rightarrow \pm\infty$, со степенной скоростью. Это дает пример точного решения в задаче Гуревича–Питаевского о распаде начального разрыва.

План

- Основной результат
- Мотивировка: задача Гуревича–Питаевского
- Отличия от решения Гуревича–Питаевского
- Стационарные уравнения неавтономных симметрий КдФ
- Представление нулевой кривизны и первые интегралы
- Некоторые явные решения
- Решения общего положения
- Уравнение Пенлеве при $t = 0$
- Регулярные решения
- Предельный переход к решению типа ступеньки
- Решение типа ступеньки
- Заключение

Основной результат

Уравнение КдФ $u_t = u_3 + 6uu_1$ допускает решения «типа ступеньки» (выходящие на разные постоянные при $x \rightarrow \pm\infty$), удовлетворяющие некоторому неавтономному ОДУ порядка 6.



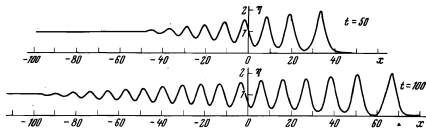
Мотивировка: задачи Гуревича–Питаевского

ГП (1973): режимы развития осцилляций в нелинейных моделях

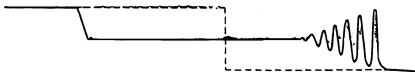
Распад начального разрыва

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

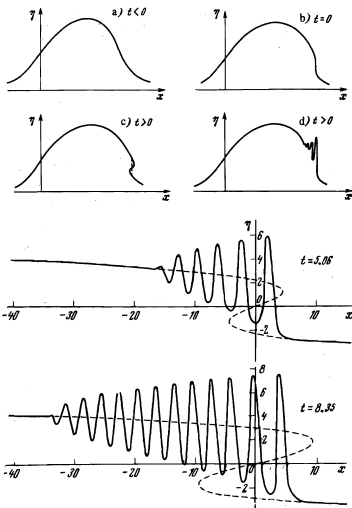
волна сжатия



волна разрежения и волна сжатия (в КДФ нужно рассматривать отдельно)

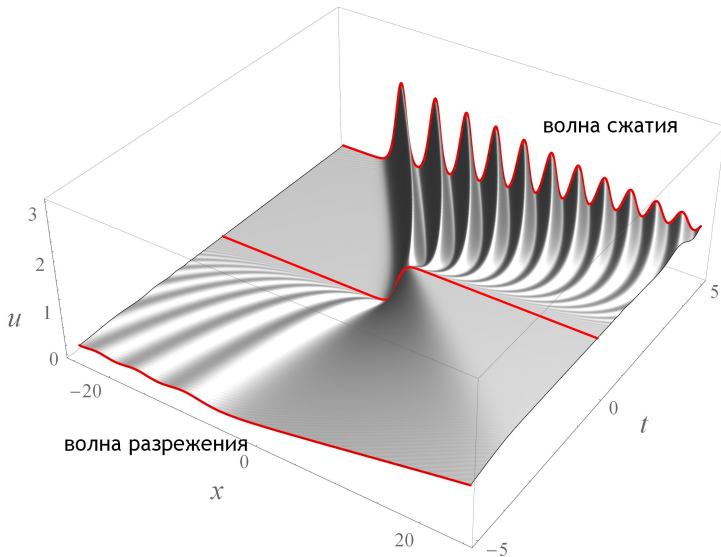


Окрестность точки опрокидывания



Нас интересует задача о ступеньке. Построить решение для достаточно общих начальных условий нетрудно методом сеток, например, по схеме Забуски–Краскала. Однако, такое решение не обязано удовлетворять какому-либо ОДУ.

Пример с начальным условием $u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 + \tanh x)$.



Известные результаты (список, конечно, неполный):

- Хруслов, Котляров (1976, 1994), Venakides (1986): метод обратной задачи, уточнение асимптотических формул
- Cohen (1984), Karpeler (1986) и др.: обоснование корректности задачи Коши со ступенько-образными и более общими начальными условиями, при различных предположениях
- Бикбаев (1989), Новокшенов (2005), Егорова, Teschl (2013) и др.: обобщения на конечнозонную асимптотику и на другие уравнения

Аналогичные результаты получены для второй задачи ГП, об окрестности точки опрокидывания.

Характер решений в обеих задачах ГП наводит на мысль об автомодельности. Нельзя ли описать их на языке классических или высших симметрий КдФ?

Для окрестности точки опрокидывания, эта идея была реализована.

- Сулейманов и Кудашев (1994, 1996): решение нужного вида допускает стационарное уравнение для суммы высшей симметрии 5-го порядка и симметрии Галилея

$$u_{t_5} + ku_{\tau_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_4 + 10uu_2 + 5u_1^2 + 10u^3 + k(6tu + x) = 0$$

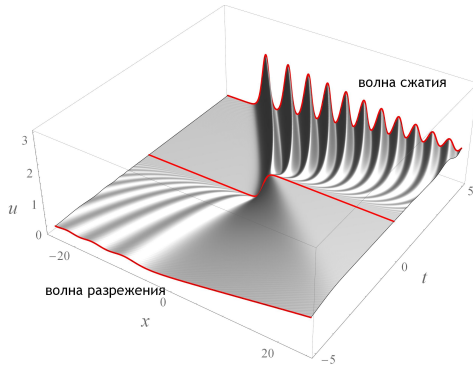
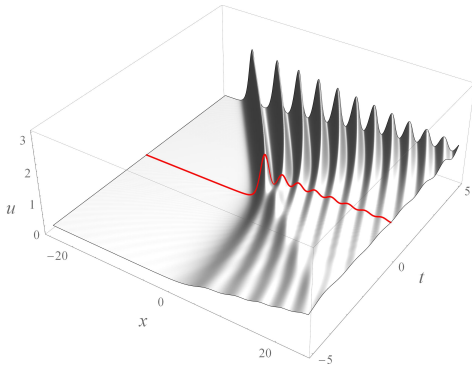
- Дубровин (2006): гипотеза о единственности решения
- Claeys, Vanlessen (2007): доказательство существования

Мы хотим показать, пока что только численно, что в задаче о ступеньке тоже есть решение (2-параметрическое семейство), связанное с неавтономными симметриями.

Отличия от решения Гуревича–Питаевского

Решение ГП имеет начальное условие в виде единичного скачка. На снимках мы видим решение, похожее на ГП. Но есть и заметные различия:

- начальное условие не является монотонным;
- решение стремится к 0 как $O(x^{-2})$, к 1 как $O(x^{-1})$;
- осцилляции в нижней части волны разрежения отсутствуют, вместо них происходит рассасывание начальных осцилляций в верхней части.



Стационарные уравнения неавтономных симметрий КдФ

Полная алгебра высших симметрий КдФ получается при помощи оператора рекурсии $R = D_x^2 + 4u + 2u_1 D_x^{-1}$:

$$u_{t_{2j+1}} = R^j(u_1), \quad u_{\tau_{2j+1}} = R^j(6tu_1 + 1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

(коммутативная и некоммутативная части иерархии КдФ).

Все симметрии КдФ порядка ≤ 5 :

$u_{t_1} = u_1$	(сдвиг по x)
$u_{t_3} = (u_2 + 3u^2)_x$	(сдвиг по t)
$u_{t_5} = (u_4 + 10uu_2 + 5u_1^2 + 10u^3)_x$	(высшая симметрия)
$u_{\tau_1} = 6tu_1 + 1$	(преобразование Галилея)
$u_{\tau_3} = 3tu_{t_3} + xu_1 + 2u$	(растяжение)
$u_{\tau_5} = 3tu_{t_5} + xu_{t_3} + 4u_2 + 8u^2 + 2u_1u_{-1}$	(мастер-симметрия)

Нелокальная переменная $v = u_{-1}$ в последнем уравнении дифференцируется по правилу

$$v_x = u, \quad v_t = u_2 + 3u^2.$$

- Ибрагимов, Шабат (1979): впервые выписана мастер-симметрия ∂_{τ_5}
- Fuchssteiner (1983) и др.: «мастер-симметрия» (уравнения Бенджамина–Оно, КП и др.)
- Орлов, Шульман (1985): алгебра симметрий НУШ
- Бурцев, Захаров, Михайлов (1987): представление нулевой кривизны с переменным спектральным параметром

Стационарное уравнение $E[u] = 0$ для любой линейной комбинации симметрий удовлетворяет тождеству

$$D_t(E) = (D_x^3 + 6uD_x + 6u_1)(E) = 0,$$

то есть, это связь, совместная с КдФ.

- Новиков, Дубровин, Матвеев (1974, 1976): конечнозонные решения, при использовании только автономных симметрий
- добавление неавтономных приводит к уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам, как в случае уравнения Сулейманова
- Moore (1990) и др.: струнные уравнения

Общая линейная комбинация симметрий порядка ≤ 5 приводит к стационарному уравнению

$$u_{\tau_5} + k_1 u_{\tau_3} + k_2 u_{\tau_1} + k_3 u_{t_5} + k_4 u_{t_3} + k_5 u_{t_1} = 0.$$

Не теряя общности, положим $k_3 = k_4 = k_5 = 0$, сдвигая t, x и v на константы.

Утверждение 1. Уравнения

$$u_t = u_3 + 6uu_1, \quad v_t = u_2 + 3u^2 \quad (1)$$

совместны с ОДУ

$$\begin{aligned} & 3t(u_4 + 10uu_2 + 5u_1^2 + 10u^3)_x + x(u_2 + 3u^2)_x + 4u_2 + 8u^2 + 2u_1v \\ & + k_1(3t(u_2 + 3u^2)_x + xu_1 + 2u) + k_2(6tu_1 + 1) = 0, \quad v_x = u. \end{aligned} \quad (2)$$

Позже мы перепишем это в более удобном виде.

Параметры k_1, k_2 также можно зафиксировать. Заметим, что постоянные решения $u = c$ уравнения (2) исчерпываются корнями уравнения

$$8c^2 + 2k_1c + k_2 = 0.$$

Чтобы могла быть разная асимптотика при $x \rightarrow \pm\infty$, необходимы два различных вещественных корня. С учетом следующего утверждения можно считать, не теряя общности, что они равны 0 и 1, то есть,

$$k_1 = -4, \quad k_2 = 0$$

и, окончательно, мы приходим к уравнению $u_{\tau_5} - 4u_{\tau_3} = 0$.

Утверждение 2. Уравнения (1), (2) инвариантны относительно преобразования Галилея

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + 6c\tilde{t}, & \tilde{t} &= t, & \tilde{u} &= u - c, & \tilde{v} &= v - cx - 3c^2t, \\ \tilde{k}_1 &= 8c + k_1, & \tilde{k}_2 &= 8c^2 + 2k_1c + k_2 \end{aligned}$$

и растяжения

$$\tilde{x} = \varepsilon^{-1}x, \quad \tilde{t} = \varepsilon^{-3}t, \quad \tilde{u} = \varepsilon^2u, \quad \tilde{v} = \varepsilon v, \quad \tilde{k}_1 = \varepsilon^2k_1, \quad \tilde{k}_2 = \varepsilon^4k_2.$$

Также, отсюда следует, что можно не делать различия между правыми и левыми ступеньками: они переходят друг в друга при центральной симметрии $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$.

Представление нулевой кривизны и первые интегралы

Используем условия совместности линейных уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad \Psi_\tau + K\Psi_\lambda = W\Psi,$$

где $K = K(\lambda)$ многочлен с постоянными коэффициентами. Само КдФ эквивалентно уравнению

$$U_t = V_x + [V, U],$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - u & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -u_1 & -4\lambda + 2u \\ 2(\lambda + u)(2\lambda - u) - u_2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Всем симметриям отвечают матрицы W , имеющие общую структуру

$$W = \begin{pmatrix} -Y_x & 2Y \\ -2(\lambda + u)Y - Y_{xx} & Y_x \end{pmatrix}$$

(это же верно для U и V , для которых $Y = 1/2$ и $Y = -2\lambda + u$, соответственно).

Стационарное уравнение симметрии имеет представление

$$KU_\lambda = W_x + [W, U], \quad KV_\lambda = W_t + [W, V]. \quad (3)$$

Это эквивалентно уравнениям

$$Y_{xxx} + 4(u + \lambda)Y_x + 2u_1Y = K, \quad Y_t = Y_{xxx} + 6uY_x - 3K. \quad (4)$$

Считая Y многочленом от λ , можно однозначно найти все его коэффициенты.

Если $K = 0$ (автономные симметрии), то уравнения (4) имеют общий первый интеграл

$$H(\lambda) = \det W = 2YY_{xx} - Y_x^2 + 4(\lambda + u)Y^2 = \text{const}(\lambda).$$

При $\deg Y = n$ имеем $2n$ первых интегралов, что достаточно для интегрируемости по Лиувиллю.

Если $K \neq 0$, выживает лишь $\deg K$ интегралов, отвечающих нулям K :

$$H_i = H(\lambda_i), \quad K(\lambda_i) = 0$$

(точнее, если λ_i имеет кратность r_i , то сохраняются производные $\frac{d^j H}{d\lambda^j}(\lambda_i)$, $j = 0, \dots, r_i - 1$). Этого крайне мало, интегрируемость портится.

Применительно к нашему уравнению $u_{\tau_5} - 4u_{\tau_3} = 0$, имеем

$$K = -8\lambda(\lambda + 1), \quad Y = 24t\lambda^2 - 2(6tu + x - 12t)\lambda + y,$$

$$y = Y(0) = 3t(u_2 + 3u^2) + xu + u_{-1} - 2(6tu + x).$$

Удобно переписать уравнения в переменных u, y .

Утверждение 3. При $k_1 = -4$, $k_2 = 0$, уравнения (1), (2) эквивалентны совместным системам ОДУ порядка 6:

$$\begin{cases} 3t(u_3 + 6uu_1 - 4u_1) + xu_1 + 2u - y_1 - 2 = 0, \\ y_3 + 4uy_1 + 2u_1y = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} u_t = u_3 + 6uu_1, \\ y_t = 2uy_1 - 2u_1y, \end{cases} \quad (6)$$

допускающим два общих первых интеграла

$$H_0 = 2yy_2 - y_1^2 + 4uy^2, \quad H_1 = 2zz_2 - z_1^2 + 4(u - 1)z^2,$$

где $z = Y(-1) = 12tu + 2x + y$.

Замечания.

1) Строго говоря, систему (6) следует переписать в виде векторного поля на переменные u, u_1, u_2, y, y_1, y_2 , исключая u_3, y_3 при помощи (5).

2) Так называемая «негативная» симметрия КдФ определяется уравнениями

$$u_{\tau-1} = y_1, \quad y_3 + 4uy_1 + 2u_1y = 0.$$

Нетрудно видеть, что (5) можно интерпретировать не только как стационарное уравнение $u_{\tau_5} - 4u_{\tau_3} = 0$, но и как стационарное уравнение $u_{\tau_3} - 2u_{\tau_1} - u_{\tau-1} = 0$.

3) Переменные y и z можно интерпретировать, как произведения ψ -функций уравнения Шрёдингера, при $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$, соответственно. Это даёт ещё одну форму записи системы (5):

$$\begin{aligned}\psi'' &= -u\psi, & \tilde{\psi}'' &= -u\tilde{\psi}, \\ \varphi'' &= (1-u)\varphi, & \tilde{\varphi}'' &= (1-u)\tilde{\varphi}, \\ 12tu + 2x &= \varphi\tilde{\varphi} - \psi\tilde{\psi}.\end{aligned}$$

Некоторые явные решения

u	y	H_0	H_1
0	$-2x + a$	-4	$-4a^2$
1	a	$4a^2$	-4
$\frac{2}{\cosh^2 X}$	$2(1 - x \tanh X) \tanh X, \quad X = x + 4t + a$	-4	-16
$1 - \frac{2}{\cos^2 X}$	$\frac{2(6t - x) - \sin 2X}{\cos^2 X}, \quad X = x + 2t + a$	-16	-4
$-\frac{x}{6t}$	0	0	0
$-\frac{2}{(x + a)^2}$	$\frac{2(12t + a)}{(x + a)^2} - 2(x + a)$	-36	$-16a^2$
$1 - \frac{2}{(x + 6t + a)^2}$	$\frac{2a}{(x + 6t + a)^2} + 2a$	$16a^2$	-36

Вероятно, первые три решения — это единственные явные среди регулярных при всех x, t . Рациональных решений с вещественными полюсами бесконечно много. Есть также более общие семейства, связанные с функциями Бесселя.

Решения общего положения

Из-за того, что в уравнении (5) при старшей производной u_3 стоит t , прямая $t = 0$ особая. Решение общего положения имеет на ней сингулярность.

Простейший явный пример сингулярного решения: $u = -\frac{x}{6t}$.

- Похожаев (2012): исследование условий, при которых в задаче Коши для КдФ возникают особенности за конечное время (blow-up).

В полуплоскости $t < 0$ (или $t > 0$) решение строится так:

Начальные данные: $(u_0, u_1, u_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$
в точке (x_0, t_0) , $t_0 < 0$.



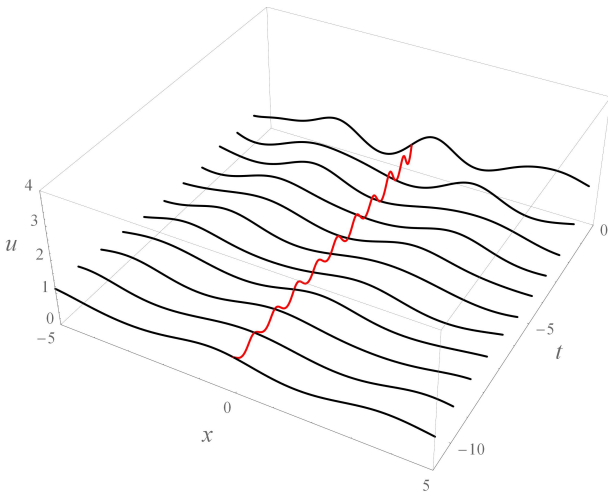
Решение системы (6) по t при $x = x_0$.
Это начальные данные для системы (5).



Решение системы (5) по x при всех $t \in (-\infty, 0)$.

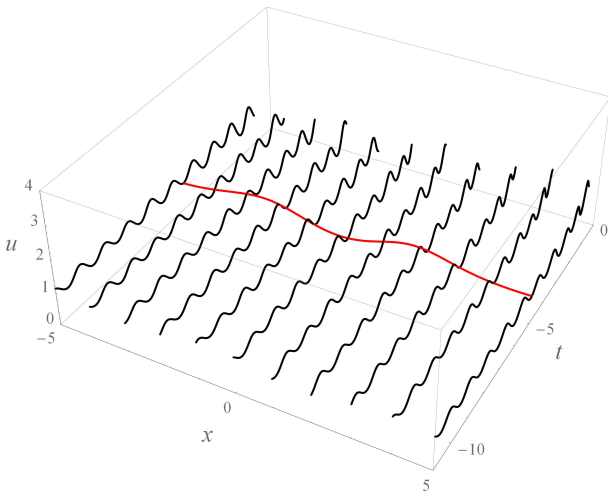
Наоборот, можно сначала решить систему (5) при $t = t_0$, затем с этими начальными данными решать систему (6) при всех x .

Для некоторой области в пространстве начальных данных, решения не имеют особенностей при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_{<0}$. В этом случае оба способа построения решения дают одно и то же.



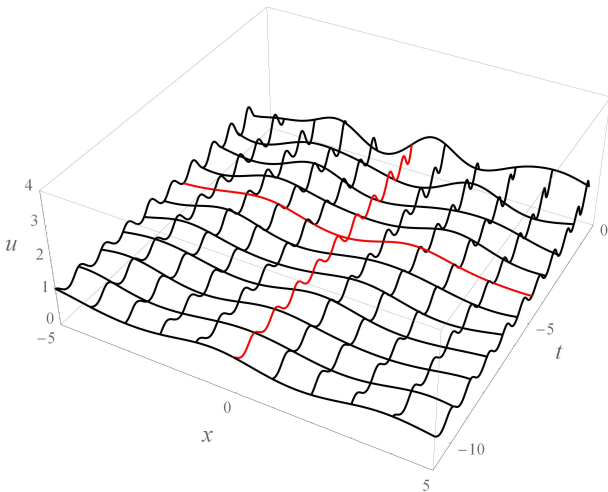
Наоборот, можно сначала решить систему (5) при $t = t_0$, затем с этими начальными данными решать систему (6) при всех x .

Для некоторой области в пространстве начальных данных, решения не имеют особенностей при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_{<0}$. В этом случае оба способа построения решения дают одно и то же.



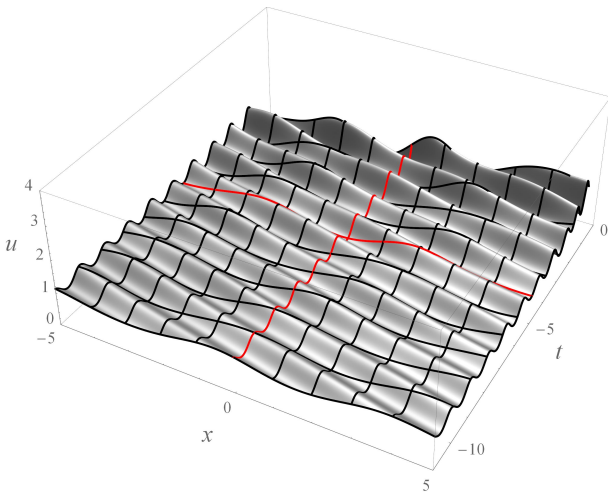
Наоборот, можно сначала решить систему (5) при $t = t_0$, затем с этими начальными данными решать систему (6) при всех x .

Для некоторой области в пространстве начальных данных, решения не имеют особенностей при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_{<0}$. В этом случае оба способа построения решения дают одно и то же.

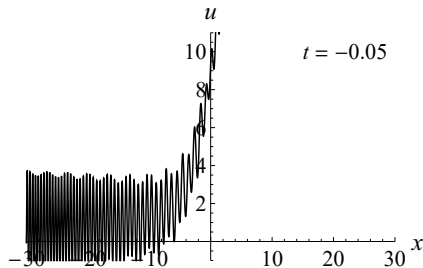
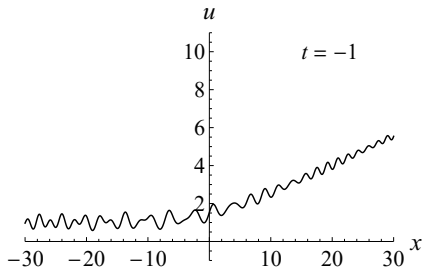
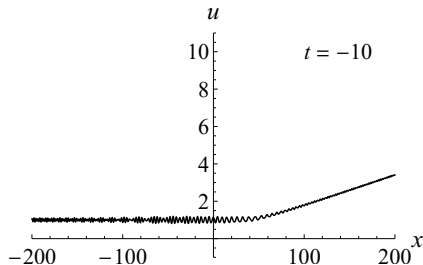
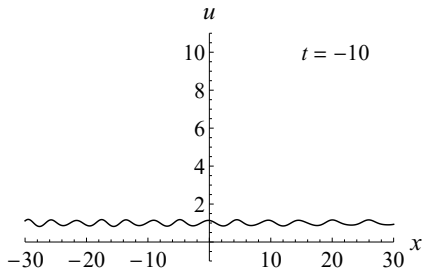


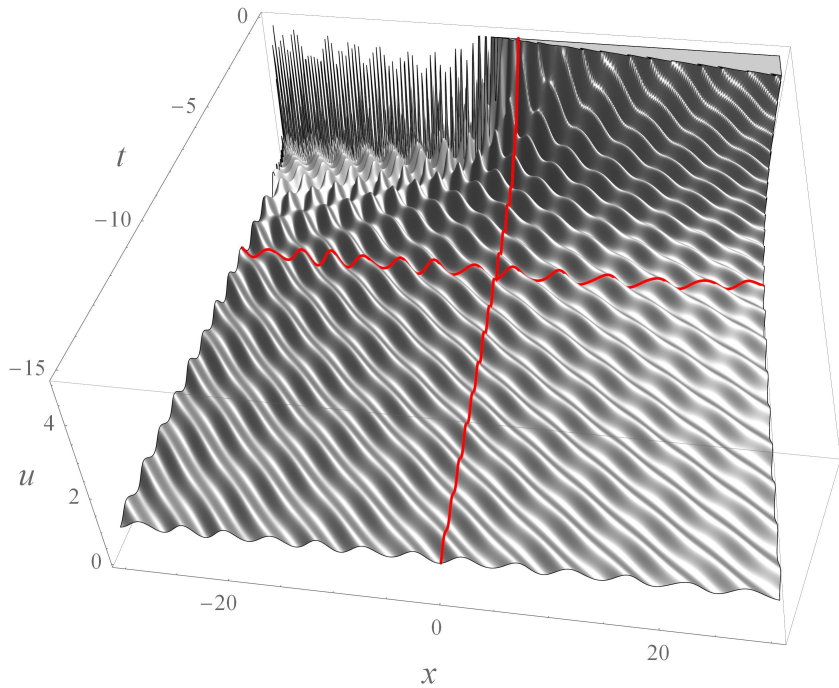
Наоборот, можно сначала решить систему (5) при $t = t_0$, затем с этими начальными данными решать систему (6) при всех x .

Для некоторой области в пространстве начальных данных, решения не имеют особенностей при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_{<0}$. В этом случае оба способа построения решения дают одно и то же.



При небольших x типичное решение выглядит, как осцилляции около $u = 1$, но, на самом деле, оно растет по x на одной полуоси. При увеличении t рост заметен уже при небольших x , а на другой полуоси усиливаются осцилляции. При $t \rightarrow 0$ возникает сингулярность.





Уравнение Пенлеве при $t = 0$

Далее рассматриваем только решения, регулярные при $t = 0$. Для них на этой прямой порядок уравнения падает до 4:

$$xu_1 + 2u - y_1 - 2 = 0, \quad y_3 + 4uy_1 + 2u_1y = 0. \quad (7)$$

Первые интегралы:

$$H_0 = 2yy_2 - y_1^2 + 4uy^2,$$

$$H_1 = 2(2x + y)y_2 - (2 + y_1)^2 + 4(u - 1)(2x + y)^2.$$

На y получается уравнение порядка 2, эквивалентное вырожденному уравнению P_5 (связанному также с P_3 , Громек 1975).

Утверждение 4. (ВА, Шабат, Ямилов 2000) Система (7) эквивалентна

$$p'' = \left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{p-1} \right) (p')^2 - \frac{p'}{X} + \frac{(p-1)^2}{X^2} \left(\alpha p + \frac{\beta}{p} \right) + \gamma \frac{p}{X} + \delta \frac{p(p+1)}{p-1} \quad (P_5)$$

при замене

$$p(X) = \frac{2x}{y(x)} + 1, \quad X = x^2, \quad \alpha = -\frac{H_0}{32}, \quad \beta = \frac{H_1}{32}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \delta = 0.$$

Регулярные решения

В свою очередь, система (7) имеет особую точку $x = 0$. Для решений, регулярных в этой точке, начальные условия должны быть связаны соотношением

$$2u(0, 0) = y_1(0, 0) + 2.$$

Таким образом, условие регулярности ещё раз понижает размерность, с 4 до 3.

В окрестности $x = 0$ регулярные решения строятся в виде рядов

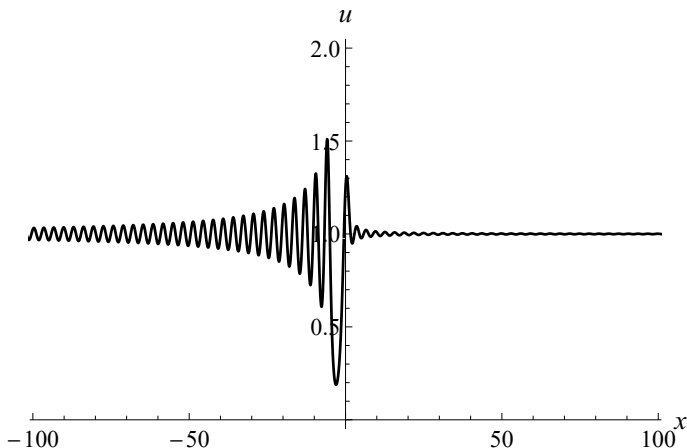
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad u = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots,$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2 свободны, а остальные находятся по формулам

$$b_0 = 1 + \frac{1}{2}a_1, \quad b_{n-1} = \frac{n}{n+1}a_n, \quad n = 2, 3, \dots,$$
$$a_n = -\frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=0}^{n-2} (2n-4-j)b_j a_{n-2-j}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Ряды имеют радиус сходимости порядка 1. Дальше решение можно продолжить, численно решая (7).

Конечно, решения могут иметь подвижные особенности (полюсы) и при $x \neq 0$. Однако, численные эксперименты показывают, что имеется область начальных данных, для которых решения регулярны на всей оси. Типичное такое решение имеет вид медленно затухающих (как x^{-1}) осцилляций около $u = 1$, разделенных провалом около 0, причем амплитуда осцилляций слева и справа разная.



Итак, все регулярные решения наших уравнений параметризуются тремя числами a_0, a_1, a_2 — начальными данными в точке $(0, 0)$. Сначала мы строим по ним решение при $t = 0$.

Дальше требуется продолжить его на все значения t . Это самый сложный этап, с вычислительной точки зрения. Теоретически, он тоже сводится к решению ОДУ, более того, решение можно строить разными способами:

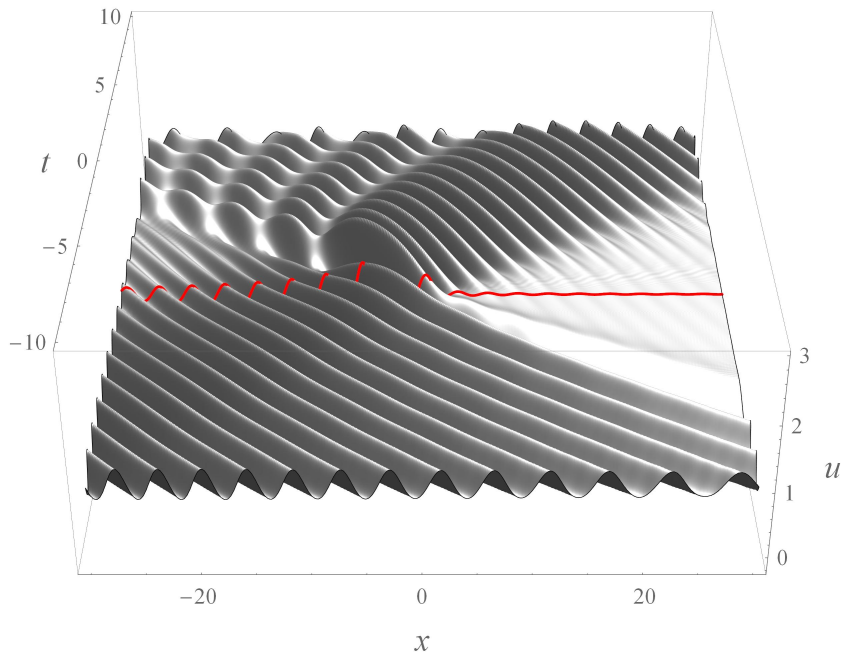
- использовать решение при $t = 0$ в качестве начальных данных для системы (6) при всех x (опять, сначала решение в виде ряда, затем его продолжение);
- сначала решить (6) при $x = 0$, с теми же начальными данными a_0, a_1, a_2 ; затем использовать полученное решение как начальные данные для (5) при всех t ;
- решать уравнения вдоль прямых $x = ct$, с начальными данными a_0, a_1, a_2 .

На практике, это все работает, но плохо. Во-первых, ряды по t сходятся хуже, чем по x ; во-вторых, сами уравнения крайне неустойчивы (жесткие системы) и решения сбиваются на сингулярные.

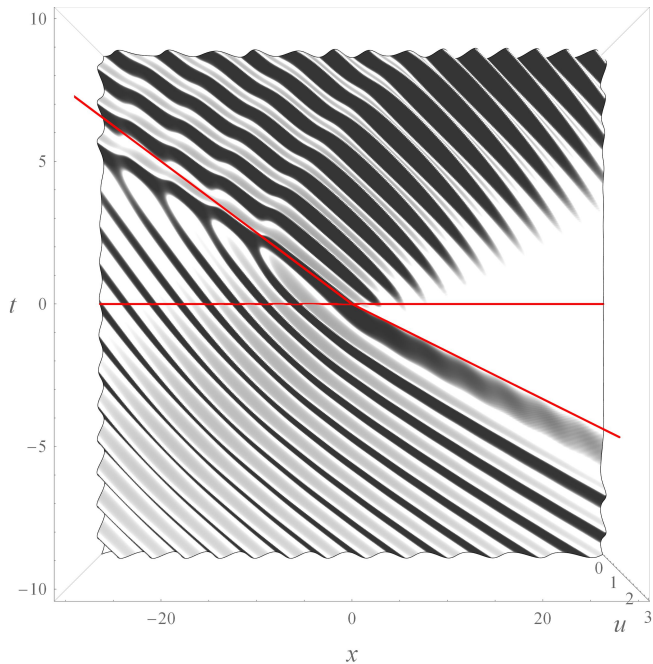
Возможно, требуется какая-то нетривиальная замена переменных.

Пока что оказывается эффективнее продолжать решение сеточным методом.

То же решение при $t \neq 0$. Вид со стороны $t < 0$.



Вид сверху. Выделены лучи $x = -6t, t < 0$ и $x = -4t, t > 0$.



Предельный переход к решению типа ступеньки

Плавнo варьирuя начальные данные для системы (7), можно заметить уширение центрального провала в момент, предшествующий образованию полюса. При этом на одной полуоси решение практически не меняется, а на другой осцилляции отъезжают все дальше и дальше.

Насколько далеко можно их отогнать?

Применим метод пристрелки для подбора начального значения a_0 , при фиксированных a_1, a_2 , либо при фиксированных значениях первых интегралов

$$H_0 = 4a_0a_2 + 2a_0^2(a_1 + 2) - a_1^2, \quad H_1 = 4a_0a_2 + 2a_0^2a_1 - (a_1 + 2)^2.$$

Задается отрезок $[a_0(1), a_0(2)]$, на одном конце которого решение срывается в особенность, а на другом осциллирует. В середине считается новое решение и одна половина отрезка выкидывается. Получается последовательность значений

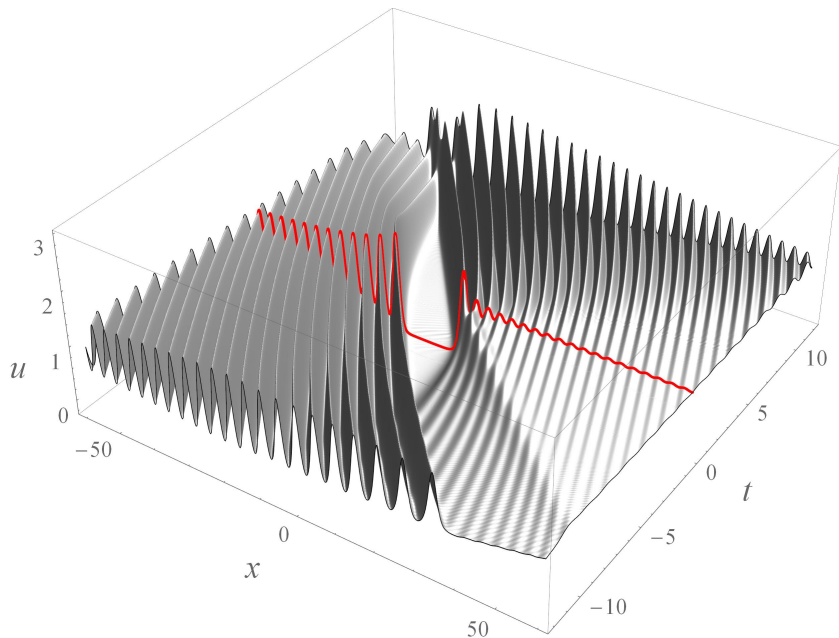
$$a_0(n) \rightarrow a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

для которых провал постепенно расширяется. В пределе получается сепаратрисное решение в виде ступеньки.

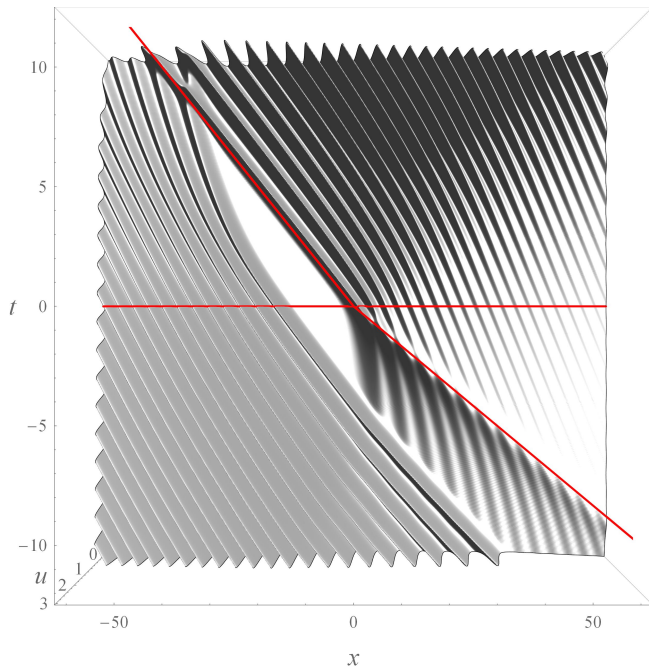
Процесс отдаленно напоминает предельный переход от кноидальной волны к солитону, но затрагивает лишь одну впадину.

Одна из ступенек при $H_0 = -2$, $H_1 = -6$. Грубо говоря, чтобы удлинить ступеньку на 1, нужно вычислить следующий точный десятичный знак a_0 .

Промежуточное решение с широкой ямой.



Вид сверху.



Решение типа ступеньки

Ступеньки, отвечающие разным значениям H_0, H_1 , на вид мало отличаются, различие проявляется в асимптотике. Подставляя в (7) разложения по x^{-1} , нетрудно построить формальные асимптотические решения в виде рядов

$$u(x) \sim A_2 x^{-2} + A_3 x^{-3} + \dots, \quad y(x) \sim -2x + B_0 + B_2 x^{-2} + B_3 x^{-3} + \dots$$

причем оказывается, что

$$A_2 = \frac{H_0 + 4}{16}, \quad B_0^2 = -\frac{H_1}{4},$$

а все остальные коэффициенты находятся однозначно. Таким образом, асимптотика при $u \rightarrow 0$ определяется первыми интегралами (при $u \rightarrow 1$ асимптотические формулы выписать сложнее).

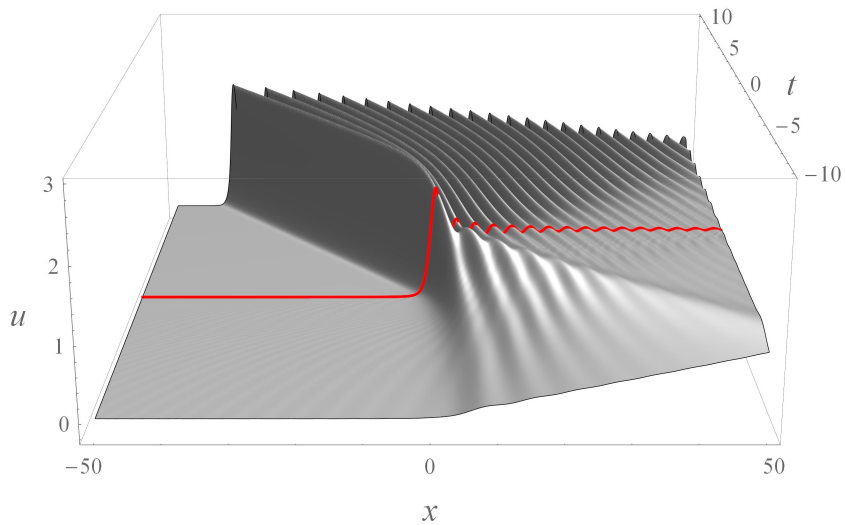
Гипотеза. Решения типа ступеньки с асимптотикой $u \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$ существуют при некоторых двух значениях a_0 для любых значений $H_0 > -4$ и $H_1 < 0$.

Это означает, что имеется двухпараметрическое семейство ступенек. Зеркально симметричным ступенькам с асимптотикой $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$ отвечают значения $-a_0$.

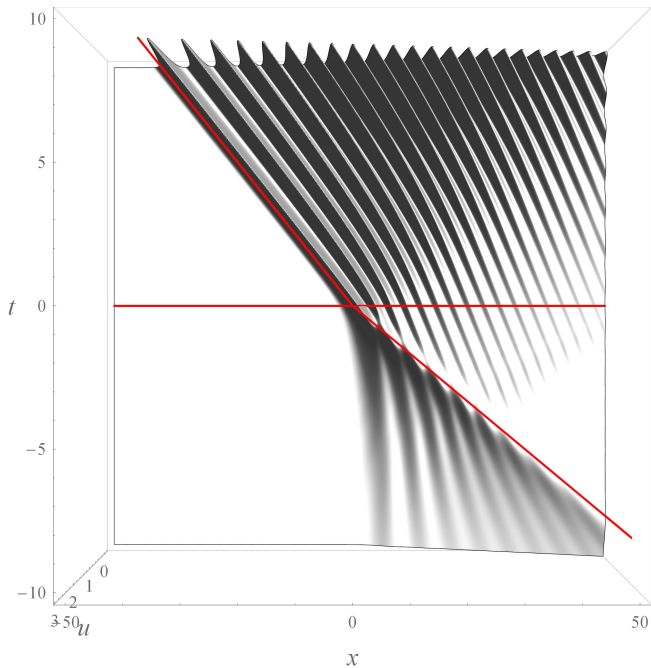
В заключение, разные графики для той же ступеньки при $H_0 = -2$, $H_1 = -6$.
Волна сжатия.

Осцилляции в нижней части волны разрежения отсутствуют, вместо них происходит медленное рассасывание начальных осцилляций в верхней части.

Вид со стороны $t < 0$.



Вид сверху. Выделены лучи $x = -6t$, $t < 0$ и $x = -4t$, $t > 0$.



Заключение

Мы показали (численно), что уравнение КдФ допускает решения, определяемые парой ОДУ (5) и (6).

Для решений этих ОДУ описана такая последовательность вырождений:

решения общего положения (6 параметров)



решения, регулярные при $t = 0$ (4 параметра),
уравнение P_5



решения, регулярные при $x = 0, t = 0$ (3 параметра),
явное специальное начальное условие



сепаратрисные решения типа ступеньки (2 параметра),
неявное специальное начальное условие (пристрелка)

Эффективность выделения очередного подкласса падает на каждом шаге. Это затрудняет численный счёт: он постоянно сбивается на решения более общего вида.

Поэтому, для двух последних классов решений необходимо искать более адекватную характеристику. (Для сравнения: солитон проще, чем кноидальная волна, но у нас пока получается наоборот).

Тем не менее, обнадеживает сам факт, что для решений типа ступеньки удалось найти хоть какие-то дифференциальные уравнения.

Открытые задачи:

- строгое доказательство существования регулярных и сепаратрисных решений;
- изучение их асимптотики и формул связи;
- приложения к задаче ГП.